

Innledende kommentarer:

Artikkelen ble utgitt i Skolepsykologi nr 5/98. Den omtaler en fremragende russisk vitenskapsmenn innenfor matematikk-kognisjon – Vadim Andreevich Krutetskii. Han er lite kjent i Norden, og dette er en presentasjon av sentrale sider ved hans arbeid.

§§

Krutetskii. Et viktig bidrag til arbeidet med matematikkvansker

Vadim Andreevich Krutetskii har i likhet med mange andre vitenskapsmenn i Russland vært lite kjent i vesten. Krutetskii startet sitt program for undersøkelse av matematiske evner hos skolebarn i 1955 - og avla rapport i 1966. Originalitet, faglige nyvinninger og metodisk utforming, ligger på et nivå som, Jeremy Kilpatrick, professor i matematikkopplæring, University of Georgia, og Izaak Wirszup, professor i matematikk, University of Chicago, setter på linje med arbeidet til Piaget.

Vesten ble for første gang kjent med Krutetskii gjennom et «paper» til «The Seventeenth International Congress of Psychology» i Washington i 1963. Senere samme år publiserte han en artikkel om hvordan lavtfungerende elever i matematikk tenker. (Simon & Simon, (1963)).

Disse små smakebitene på Krutetskii`s arbeid, avslørte at vi stod overfor en stor vitenskapsmann - ikke bare i sovjetisk fagtradisjon, men også i internasjonal sammenheng.

I 1968 forelå så en komplett rapport av hans teoretiske og eksperimentelle arbeid de foregående 12 år. Den ble utgitt i bokform - og i et opplag på 25.000. Verket, « The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren» ble utgitt i vesten i 1976 (Krutetskii (1976)), etter et nensomt redaksjonsarbeid av Kilpatrick og Wirszup.

Konseptet til Krutetskii er bygget opp for å avdekke hvordan elever tenker ved løsning av matematiske utfordringer. Metodisk er dette anlagt gjennom en gruppering av elever som er høytfungerende, gjennomsnittlige og lavtfungerende. I tillegg har han foretatt individuelle

kasusstudier på særlig begavede elever i matematikk. Med utgangspunkt i avdekkede forskjeller - delvis innenfor hovedgruppene og mellom dem, kan en få større innsikt i hvordan man skal bygge opp pedagogikken - kanskje spesielt for de svakeste.

Krutetskii er ikke den første som har forsøkt å avdekke hvordan elever tenker i forbindelse med matematiske utfordringer. Han har imidlertid løst oppgaven på en temmelig overbevisende og dokumentarisk måte, og fremfor alt - det vokser pedagogisk innsikt ut av hans arbeid.

Krutetskii har i forbindelse med sin rapport også en grundig gjennomgang av vestlig og østlig fagtradisjon. Denne gjennomgangen er imponerende, og ikke helt uventet blir den vestlige testtradisjonen angrepet. Han er svært skeptisk til den faktoranalytiske tilnærming, og mener dessuten at testresultatene i for stor grad blir vektlagt på bekostning av **prosessene** som fører til resultatene (prosessanalyse). Hans arbeid er nettopp fokusert på disse prosessene - mer enn på selve resultatene av dem. Det må likevel nevnes at faktoranalytisk tilnæringsmåte ikke er fremmed for Krutetskii. Tvertimot - det går fram av hans statistiske bearbeiding av data at han selv i betydelig målestokk anvender metoden i sine analyser. Hans metodiske kartlegging av kognitive prosesser, er imidlertid av aller største betydning for oss som arbeider med omfattende kartlegging innenfor vestlig tradisjon.

Forskningsprosjektet

Krutetskii`s kartleggingssystem består av serier av eksperimentelle problem, som er gruppert i fire grunnleggende kategorier. Tre kategorier svarer til de tre grunnleggende steg i løsningen av matematiske problem:

1. Samle opplysninger som trengs for å løse problemet.
2. Prosessere disse opplysninger mens en løser problemet.
3. Huske resultatet og konsekvensen av løsningen.
4. Kartlegge typen av matematisk evne.

Materialet består av 26 serier som inneholder 79 oppgaver - 22 i aritmetikk, 17 i algebra, 25 i geometri og 15 andre. Strukturen i opplegget er stram.

Foruten direkte kartlegging av elevene gruppevis og individuelt, inneholder konseptet også intervju med lærere, kasusbeskrivelse av særlig begavede elever i matematikk, samt litteraturstudier av personer med spesiell matematiske begavelse.

Elevene har en aldersspredning fra 6 til 17 år. Over 1000 elever var involvert i programmet, og de ble plukket ut av sine lærere til de 3 hovedkategoriene (flinke, middels og svake i matematikk). Det er verd å merke seg at gruppene ikke er generelt flinke, middels eller svake elever. Han påviser at mange svært begavede elever i matematikk, kan være middels presterende i alle andre sammenhenger. Betegnelsene er med andre ord knyttet til faget matematikk. Materialet består også av 9 kasusbeskrivelser.

Det spesielle ved Krutetskii`s metode, er hans nitide arbeid for å få elevene til å tenke høyt **mens** de løser problemet. Utallige individuelle tilpasninger - mange ganger over måneder, karakteriserer dette arbeidet. Hvis en er avhengig av å søke samme kunnskap etter at problemet er løst øker feilkildene radikalt. Elevene har som kjent en tendens til å rapportere hva de tror at intervjuer forventer de skal svare. Krutetskii oppviser stor kreativitet i metodikk for å unngå slike feilkilder - eksempelvis at målpersonen forklarer en yngre elev hvordan han tenkte. Fra egen praksis har jeg funnet det nyttig å ta i bruk teknikker som feks. å fokusere på hvor i arbeidet det holdt på å bli feil og hva som blir viktig å huske for å gjøre dette riktig neste gang.

Innhold, kommentarer og konklusjoner

Krutetskii`s konklusjon er at begavede matematikkelever griper snarere og bedre essensen i et problem, generaliserer matematisk materiale hurtigere, forkorter den suksessive logiske tankerekke ved å minske antall ledd (curtail), skifter lettere mellom løsningsmåter, streber mot en «elegantere» løsning om mulig, makter bedre reversibel tenkning, og husker bedre

relasjonene og løsningsprinsippene i problemutfordringer - i motsetning til svakere matematikkelever som oftest fester seg ved tilfeldige detaljer. Han påviser også at middels og svake elever har mer til felles i løsningsmåter enn sine svært begavede medelever. Hans mer oppsiktsvekkende faglige konklusjoner, er nettopp knyttet til analysen av de svært begavede elever. De viser seg å være mer forskjellige enn vi tror. Krutetskii påviser en spredning i tenkning som spenner fra elever med nesten rendyrket visuell/piktorial basis for tenkning - og over til den nesten rendyrkede logisk/verbale.

Krutetskii`s materiale, kan drøftes ut fra flg. sterkt forenklete hovedpunkter:

1. Generalisering

Svakere elever har problemer med ulike generaliseringer av matematisk stoff. Dette gir seg utslag på ulike måter - alt fra evne til å gripe hovedpoenget i en oppgave og til evne til å anvende løsningsmåter i nye situasjoner. Mye lenger tid, systematiske generaliseringsstrategier og flere øvinger må til for å make dette om en sammenligner med de andre gruppene. Ulike individuelle forutsetninger i målgruppen, viser at arbeidet med generalisering i innlæringsfasen har en variasjonsbredde når det gjelder behov for repetisjoner, som strekker seg fra 2 til 88 på samme stoff. Fra min egen praksis har jeg erfaring for at nyinnlæringsfasen ofte er det kritiske punkt for mange elever.

Variasjonsbredden er større enn vi tror.

Krutetskii har en svært grundig gjennomgang av generaliseringsaspektet på ulike funksjonsarenaer - og på ulike kognitive nivåer, noe som for meg har betydd ny og utvidet innsikt i temaet.

2. Økonomisering/effektivisering

Svake elevers manglende evne til økonomisering og effektivisering av matematisk resonnering kan ha sin vesentligste årsak i svak evne til forkortning av tankerekker (Ability to curtail).

Svakt fungerende følger ofte hele tankerekken uten forkortning, mens begavede forkorter den til kanskje bare en brøkdel av den første gruppen. Dette har konsekvenser for kognitive disposisjoner. Et delressonnement kan ta så mye kognitiv rom at fokus i for stor grad blir fjernet fra sammenhengen det skal anvendes i.

Personlig har jeg hatt stor glede av en annen faglig innfallsvinkel for å belyse dette temaet. Siden Krutetskii's landsmann - Sechenov (1943), lanserte sin informasjonsbearbeidingsteori i form av suksessiv og simultan informasjonsprosessering i 1878, er den verifisert av fremragende fagmiljøer i både øst og vest. (Luria (1966)(1980)(1982), Kirby & Williams (1991), Das, Naglieri & Kirby (1994), Kaufman & Kamphaus (1984). Ut fra denne tradisjonen er det ikke i tvil om at Krutetskii her beskriver et simultant grep på en suksessjon. Hans etter min mening noe manglende faglige grep på dette området, kan være noe av årsaken til en heller knapp drøfting av hans oppdagelser av tenkningens basis i forhold til visuell/piktoral og logisk/verbalt grunnlag. Indirekte kan en si at han beskriver en forsømt innlæringsoppgave i skoleverket, nemlig økonomisering med kognitive ressurser - eller effektivisering av tenkning. Det er derfor interessant når Olof Magne (1998) i sin siste bok omtaler skoleverkets tilkortkomning mht å lære bl.a. geometrisk tenkning.

3. Fleksibilitet

Svake elevers manglende fleksibilitet i mentale prosesser. Denne elevgruppen glemmer lettere løsninger som de har anvendt i tidligere lignende situasjoner. De har liten evne til å mobilisere flere løsningsalternativer, koble over fra det ene til det andre - og kombinere dem i forhold til nye oppgaver. Vante løsningsmåter tas ofte i bruk på oppgaver som krever nye strategier.

Krutetskii omtaler her prosesser som i stor grad har sin basis i frontalsystemet. Denne kognitive produksjonen har sin spesielle karakter, og fremfor alt sin særegne metodiske tilnærming. Siden Krutetskii har valgt en funksjonsanalyttisk angrepvinkel, blir dette ikke

belyst fra denne kognitive synsvinkel. Hans helt spesielle måte å vinkle stoffet på, gir imidlertid god innsikt og grunnlag for å bygge opp pedagogiske løsninger.

4. Korteste/eleganteste vei til målet

Svake elever har svekkede evner til på enkleste, mest veldefinerte, korteste og økonomiske (eleganse) måte å nå et definert mål. Dette er i likhet med det forrige punkt en kognitiv planprosess som beskrives. Beskrivelsen stemmer godt til Lurias (1980) omtale av frontale kognitive funksjoner.

5. Reversibel tenkning

Reversibel tenkning drøftes her i forhold til matematisk resonnering. Krutetskii understreker at hans måte å behandle begrepet på, avviker fra Piaget. Han deler det inn i 2 underliggende funksjoner: 1. Toveis assosiasjoner (tenker i begge retninger). 2. Reversibel mental prosess. Forskjellen mellom dem ligger i at den ene har en mer direkte reversering av en handlings- eller tankerekke (ledd for ledd). Den andre er en mental reversering, uten at selve handlings- eller tankerekken blir direkte kopiert (ledd for ledd). Krutetskii viser til at den siste er en sterkere generalisering eller abstrahering av en mental operasjon. Svake elever kan ha problemer med begge, men i sterkere grad den siste varianten. Etter min mening operasjonaliserer Krutetskii begrepet «reversibel tenkning» på en bedre måte enn Piaget. For meg blir bl.a. de pedagogiske konsekvensene mer forståelig enn om jeg skulle ta utgangspunkt i Piaget`s utmerkede arbeider.

6. Svake elever

Hva er så svake elevers måte å tilnærme seg en oppgave på? Her er Krutetskii opptatt av at flinke elever i matematikk søker det underliggende tema i oppgaven primært, for deretter å se på løsningen. Svake elever arbeider i for stor grad etter et prøving og feilingsprinsipp, der nærmest kaotiske aktiviteter kan finne sted. Det er vel unødvendig å fastslå at dette igjen er en beskrivelse av en kognitiv planfunksjon.

7. Hukommelse

De nokså grundige hukommelsestestene som Krutetskii brukte i sine prosessanalyser, viser at hukommelsen hos svake elever var knyttet til mer tilfeldige og uvesentlige detaljer når de skulle gjengi en oppgave etter ulike tidsforløp. Løsningsmåter og underliggende prinsipper var svært lite representert i gjengivelsen. Generelt husket de lite av oppgavene og de viste dårlig hukommelse for generalisert matematisk materiale, abstrakte matematiske relasjoner og symboler, problemtyper, mønster for resonnering og generaliserte metoder for problemløsning.

Mer begavede elever i matematikk, husket prinsippene fra oppgavene og i noen grad også detaljene. Detaljene ble fort glemt, mens underliggende temaer, prinsipper og løsningsstrategier ble husket nesten i sin helhet i lang tid etterpå (9 mndr).

Pkt. 3 (manglende fleksibilitet) og pkt. 7, tangerer etter min mening Snorre Ostad`s (1997) forskning rundt variasjonene på kvaliteteten på forestillingsystemet og konsekvensene dette har for matematisk funksjon. Hans anvisninger på pedagogiske tiltak (strategiinnlæring i en metakognitiv ramme), går etter min mening rett inn i denne problematikken. Olav Lunde (1997) har forøvrig en kortfattet omtale av pedagogiske implikasjoner i forhold til metakognisjon i sin bok «Kartlegging og undervisning ved lærevansker i matematikk».

8. Svært begavede elever

Krutetskii beskriver også en del særmerkede ting i forb.m. svært begavede elever.

a. Han mener at det fins elever med matematisk kognitiv stil (Cast of Mind). Disse elevene har bl.a. en tilpasningsmåte til utenverdenen som er matematisk. De har en tendens til å kode miljøet i matematiske termer.

b. Han er videre opptatt av svært begavede matematikkelevers store evne til å arbeide med et problem over tid, uten å vise tegn til trøtthet, og med stor motivasjon og interesse. Dette er et svært interessant trekk. Flere fagmiljøer har vært opptatt av lignende problemstillinger.

Jacobsen (1998) gir i så måte et interessant innspill. Han viser til at prosessering av følelser delvis går parallellt med prosesseringen av kognitivt materiale. Følelsene prosesseres også noe hurtigere - dvs. at følelsene for et objekt kommer først - kognisjonen etterpå. Høy motivasjonen for å drive med matematiske utfordringer - som er det karakteristiske for disse elevene, kan ha sin årsak i at følelser og kognisjon spiller på lag på en særegen måte, og kanskje er dette også forklaringen på deres utholdenhet med arbeidet. Tenker vi oss svakere elever som ofte har negative faglige erfaringer med oppgaveløsning i matematikk, er det denne følelsesmessige persiperingen som sansynligvis treffer oppgaven først. Eleven må deretter bokstavelig talt - kognitivt arbeide seg gjennom denne negative startfasen. Dette kan i seg selv forklare mange triste matematikksjebner, og det kan bl.a. forklare minskende evne til å holde ut. Krutetskii's påvisning av at svært begavede matematikkelever har en tendens til å søke kunnskap selv, uten nødvendigvis noen hjelp fra spesielle personer i sitt miljø, er også interessant i denne sammenheng. Det sier noe om hvordan en skal organisere undervisningen i en skoleklasse.

c. Endelig viser han til at noen elever i denne gruppen «vet» svaret i samme øyeblikk som de ser oppgaven. Hans drøfting av dette fenomen er sterkt knyttet til bevisste og ubevisste forkortede handlingsrekker og visuelle/pictoriale «band» mellom oppgave (utløsende stimuli) og løsning. Ut fra tidligere drøfting av dette temaet tror jeg vi står overfor en simultan-suksessiv syntese av høyere orden - med hovedvekt på de simultane bidrag.

Professor Krutetskii har med sitt arbeid gitt et meget viktig bidrag til å forstå barns måte å tenke på generelt, og forskjellen mellom ulike grupper og individers måte å tenke på innenfor matematikken - spesielt. Disse forskjellene sier oss noe om hvordan tenkningen må utvikles hos elever med matematikkvansker for at de skal utvikle en funksjonell matematisk kognisjon. Materialet er veldefinert og pedagogikken formelig vokser fram av konklusjonene.

Mine kommentarer underveis kan oppfattes som kritikk av den funksjonsanalytiske tilnærming. Det motsatte er imidlertid tilfelle. Denne tradisjonen er etter min mening en av de mest lovende innenfor fagfeltet. Når det gjelder Krutetskii slutter jeg meg til professor Olof Magne`s (Magne 1980) karakteristik: Krutetskii er prosess-studienes mester.

Referanser:

Das, J.P., Naglieri, J.A. & Kirby, J.R. (1994). *Assessment of cognitive processes*. The PASS Theory of Intelligence. Toronto: Allyn and Bacon.

Jacobsen, K. (1998). Ny viten om relasjonen mellom kognitive og emosjonelle prosesser. *Tidsskrift for Norsk Psykologforening*, 35, 530 - 536.

Kaufman, A.S. & Kamphaus, R.W. (1984). Factor Analysis of the Kaufman Assessment Battery for Children (K-ABC) for Ages 2 ½ Through 12 ½ Years. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 76, No.4, 623 - 637.

Kirby, J.R. & Williams, N.H. (1991). *Learning problems: A cognitive approach*. Toronto: Kagan and Woo.

Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. The University of Chicago Press. Chicago and London.

Lunde, O. (1997). *Kartlegging og undervisning ved lærevansker i matematikk*. Info Vest Forlag.

Luria, A.R. (1966). *Human brain and psychological processes*. New York: Harper & Row.

Luria, A.R. (1980). *Higher cortical functions in man* (2nd ed.). New York: Basic Books.

Luria, A.R. (1982). *Language and cognition*. New York: Wiley.

Magne, O. (1980). *Matematik - innlæringen i grundskolan*. Lund: Sveriges Lærerforbund. Lærarhøgskolan), Nr 618.

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Studentlitteratur, Lund.

Ostad, S. (1997). Strategic competence: Issues of task-specific strategies in arithmetic. *Nordic Studies in Mathematics Education No 3*, 7 - 31.

Sechenov, I.M. (1943). *Elements of Thought*. Moscow. Leningrad: USSR Academy of Sciences Press.

Simon, B. & Simon, J. (1963). *Educational psychology in the USSR*. Stanford, Calif.: Stanford University Press.